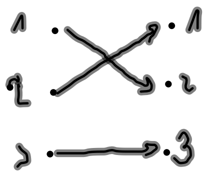
PERMUTACE

X ... konečná množina

$f: X \to X$, které je bijektivní, se nazývá PERMUTACE.

$I_n = \{1, \dots, n\}$

S_n ozn. mn. vš. permutací na I_n, má $n!$ prvků.



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad (2 \; 1 \; 3)$

$\sigma(i) := \sigma_i$

$i, j \in I_n$, $\sigma \in S_n$. Pokud $i < j$ a $\sigma(i) > \sigma(j)$, potom dvojice $(\sigma(i), \sigma(j))$ tvoří INVERZI.

$\operatorname{inv} \sigma$ ozn. počet inverzí permutace σ.

ZNAMÉNKO permutace je $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{\operatorname{inv} \sigma}$.

DETERMINANT

A... čtvercová matice $n \times n$ nad polem P.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma_n}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Př: 1) $n = 1$ $\quad A = (a)$, $I_1 = \{1\}$, $S_1 = \{id\}$

$$\det A = \operatorname{sgn} id \cdot a = 1 \cdot a = a.$$

2) $n = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad I_2 = \{1, 2\}$

$id: 1 \mapsto 1, \; 2 \mapsto 2$ $\quad$, $\quad \sigma: 1 \mapsto 2, \; 2 \mapsto 1$ $\quad S_2 = \{id, \sigma\}$

$\operatorname{inv} id = 0$ $\quad \operatorname{inv} \sigma = 1$

$\operatorname{sgn} id = 1$ $\quad \operatorname{sgn} \sigma = -1$

$$\det A = \operatorname{sgn} id \cdot a_{11} \cdot a_{22} + \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{12} \cdot a_{21} =$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

3) $n = 3$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} \\ \vdots & & \\ a_{31} & \dots & a_{33} \end{pmatrix}$ $\quad I_3 = \{1, 2, 3\}$

$id \dots (1\ 2\ 3) \dots \operatorname{inv} id = 0$, $\operatorname{sgn} id = 1$

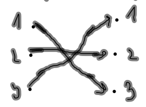
$\sigma_1 \dots (2\ 1\ 3) \dots \operatorname{inv} \sigma_1 = 1$, $\operatorname{sgn} \sigma_1 = -1$

$\sigma_2 \dots (2\ 3\ 1) \dots \operatorname{inv} \sigma_2 = 2$, $\operatorname{sgn} \sigma_2 = 1$

$\sigma_3 \dots (1\ 3\ 2) \dots \operatorname{inv} \sigma_3 = 1$, $\operatorname{sgn} \sigma_3 = -1$

$\sigma_4 \dots (3\ 1\ 2) \dots \operatorname{inv} \sigma_4 = 2$, $\operatorname{sgn} \sigma_4 = 1$

$\sigma_5 \dots (3\ 2\ 1) \dots \operatorname{inv} \sigma_5 = 3$, $\operatorname{sgn} \sigma_5 = -1$



$$\det A = \operatorname{sgn} \mathrm{id} \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} +$$

$$+ \operatorname{sgn} \sigma_1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} +$$

$$+ \operatorname{sgn} \sigma_2 \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$$+ \operatorname{sgn} \sigma_3 \cdot a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} +$$

$$+ \operatorname{sgn} \sigma_4 \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} +$$

$$+ \operatorname{sgn} \sigma_5 \cdot a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33} +$$

$$+ a_{12} a_{23} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} +$$

$$+ a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

$$\begin{array}{ccccc}
+ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & - \\
+ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & - \\
+ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & - \\
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} &
\end{array}$$

Tvrzení: Má-li matice A nulový řádek, pak $\det A = 0$.

Tvrzení: Má-li matice A dva řádky stejné, pak $\det A = 0$.

Tvrzení: 1) Přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému se determinant nemění.

2) Vynásobením i-tého řádku prvkem c se determinant vynásobí prvkem c.

3) Výměnou dvou řádků determinant změní znaménko.

Tvrzení: $\det E = 1$.

Tvrzení: $\det A = \det A^T$.

Tvrzení: Matice ve schodovitém tvaru má determinant roven součinu prvků na diagonále.

Tvrzení: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Tvrzení: Matice A je regulární $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ $\Leftrightarrow$ A je invertibilní.

Tvrzení: Pokud A je invertibilní $\Rightarrow$ $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

ALGEBRAICKÝ DOPLNĚK prvku a_{ij} značíme A_{ij} a je to $(-1)^{i+j}$-násobek determinantu matice, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Tvrzení (Laplaceův rozvoj)

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$